Métodos Numéricos
5 de octubre de 2020
Primer Parcial

DEPARTAMENTO DE COMPUTACION
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales - UBA

☐ Completar apellido en las hojas y numerarlas	Nombre y Apellido [redacted]			
☐ Enviar fotos claras y legibles de la resolución del examen	Ej. 1	Ej. 2	Ej. 3	Nota
☐ **Justificar <u>todas</u> las respuestas**				

1. Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ $(n \geq 3)$ una matriz con submatrices principales inversibles, con $a_{ij}^{(k)}$ el elemento (i,j) luego de k pasos de eliminación gaussiana y $A_{22}^{(1)} = (a_{ij}^{(1)})_{2\leq i,j\leq n}$. Probar (10 pts. c/item):

   (a) Si $A = LU$ con ℓ_1 la primera columna de L y u_1^t la primera fila de U, entonces
   $$A - \ell_1 u_1^t = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & A_{22}^{(1)} \end{pmatrix}$$

   (b) $\left\| \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix} \right\|_p = \|E\|_p$ con $p = 1, \ldots, \infty$ y cualquier $E \in \mathbb{R}^{n\times n}$. (La matriz expresada en bloques tiene bloques cuadrados en su diagonal.)

   (c) $\|A\|_\infty \leq \|A_{22}^{(1)}\|_\infty + \|\ell_1\|_\infty \, \|u_1\|_1$

2. Sean $n, p \in \mathbb{N}$, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ simétrica definida positiva, $B \in \mathbb{R}^{n\times p}$ con $rg(B) = p$. Notamos $v_i = A^{-1}Be_i$, para $i = 1, \ldots, p$ donde e_i es el i-ésimo vector de la base canónica de $\mathbb{R}^p$.

   (a) Probar que $\{Be_1, \ldots, Be_p\}$ es una base de $Im(B)$. (8 puntos)

   (b) Probar que A^{-1} es simétrica definida positiva. (8 puntos)

   (c) Probar que $Nu(B^tA^{-1}B) = Nu(B) = \{0\}$. Deducir que $\{B^tv_1, \ldots, B^tv_p\}$ es una base de $\mathbb{R}^p$. (10 puntos)

   (d) Probar que el siguiente sistema tiene solución única $(x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$ para cualesquiera $b \in \mathbb{R}^n$ y $c \in \mathbb{R}^p$. (9 puntos)
   $$\begin{pmatrix} A & B \\ B^t & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ c \end{pmatrix}$$
   .

   (e) Probar que la matriz
   $$\begin{pmatrix} A & B \\ B^t & 0 \end{pmatrix}$$
   es inversible pero no definida positiva. (8 puntos)

3. Sean $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ matrices cuadradas, y definimos $C_{A,B}$ como
   $$C_{A,B} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} B - A & -(A+B) \\ A + B & A - B \end{pmatrix}$$

   (a) Demostrar que A y B son ortogonales si y sólo si $C_{A,B}$ es ortogonal. (12 puntos)

   (b) Consideramos la matriz ortogonal $D = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -I & I \\ I & I \end{pmatrix}$.
   Sea $A = I - 2uu^t$ con $u = (0,1)^t$ y sea $B = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$ una matriz de Givens de 2×2 con $\theta = \pi$. Expresar la matriz $D\,C_{A,B}$ únicamente como el producto de matrices de Givens y de Householder en $\mathbb{R}^{4\times 4}$. (15 puntos)
   Sugerencia: calcular la factorización QR de $D\,C_{A,B}$ usando Givens.